III JORNADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I ENSENYAMENT
NOVA ÈPOCA / VOLUM 1 (2) / 2008, p. 39-50

GEOMETRIA I TRIGONOMETRIA EN EL TEOREMA DE MENELAU (100 dC)

IOLANDA GUEVARA CASANOVA;[1] FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA;[2] MARIA ROSA MASSA ESTEVE[3]
[1] IES BADALONA VII DE BADALONA. MEMBRE DEL GRUP D'HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES DE L'ASSOCIACIÓ DE BARCELONA PER A L'ENSENYAMENT I APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES.
[2] INSPECCIÓ DEL DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ DE LA GENERALITAT DE CATALUNYA. MEMBRE DEL GRUP D'HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES DE L'ASSOCIACIÓ DE BARCELONA PER A L'ENSENYAMENT I APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES.
[3] CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA. COORDINADORA DEL GRUP D'HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES DE L'ASSOCIACIÓ DE BARCELONA PER A L'ENSENYAMENT I APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES.

Paraules clau: *trigonometria, teorema de Menelau, Ptolemeu, teorema de Tales, Geogebra, ensenyament, raonament geomètric, raonament aritmètic*

Geometry and Trigonometry in Menelau's theorem (100 dC)

Summary: *History can be useful for science teaching. In this paper we present Menelau's theorem in spherical version. We explain the importance of the spherical Menelau's theorem in the astronomy and in the development of Arabian trigonometry. We use the plane version to create a new teaching material which contains an activity using Geogebra, a computing scholar program, and another activity where pupils have to follow the demonstration as Ptolemeu does in the Almagest.*

Key words: *trigonometry, Menelau's theorem, Ptolemeu, Tales theorem, Geogebra, teaching, geometric reasoning, arithmetical reasoning*

DOI: 10.2436/20.2006.01.57

Introducció

La història de les matemàtiques, com a recurs explícit a l'aula, permet millorar l'assoliment de conceptes matemàtics mitjançant l'anàlisi contextualitzada de textos històrics (Massa, 2003). El grup d'història de les matemàtiques de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Estudi i Aprenentatge de les Matemàtiques) presenta aquesta comunicació dins del projecte «El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions», que investiga l'evolució històrica dels conceptes trigonomètrics. Els objectius del projecte són: primer, proporcionar als professors una breu història dels orígens de la trigonometria, posant èmfasi en les idees trigonomètriques que formen part del currículum; segon, proporcionar traduccions de textos rellevants per utilitzar a l'aula, i, finalment, dissenyar i experimentar activitats d'aula que ajudin a entendre millor els conceptes trigonomètrics. Treballem des de diferents perspectives: la notació, l'evolució del concepte d'angle, les taules de sinus, el teorema del sinus i del cosinus... Així, en la nostra anàlisi dels textos estudiem els mètodes de càlcul per a construir les taules de sinus, on i com comença la notació trigonomètrica, quan apareixen les primeres demostracions i teoremes, la relació entre la trigonometria i la geometria, la relació entre la trigonometria i l'astronomia, quan la trigonometria esdevé una ciència independent i de quina manera la trigonometria s'aplica a altres camps com la navegació, l'òptica i l'astronomia. A l'hora d'analitzar textos històrics a classe, també parem atenció als raonaments matemàtics i al tipus de demostracions que hi apareixen, per tal de preveure el grau de dificultat que poden generar, si es presenten com activitats d'aula.

La investigació abraça des de l'antiguitat fins al període de Regiomontanus (1436-1476), analitzant textos rellevants i dissenyant activitats per utilitzar a l'aula.[1] Altres textos ja analitzats en aquest projecte han estat: *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* d'Aristarc de Samos (310 aC-230 aC) (Aristarco de Samos, 2007); els *Elements* d'Euclides (300 aC) (Romero; Guevara; Massa, 2007); l'*Almagest* de Ptolemeu (*c*. 85-*c*. 165 dC) (Massa & Romero, 2003); *Traité du quadrilatère* de Nassir-al-Tusi (1201-1274) (Romero, Massa & Casals, 2006), i *De triangulis omnimodis* de Regiomontanus (1436-1476) (Guevara & Casals, 2003).

En aquest article es presenta el teorema de Menelau per a tres dimensions, inclòs a les *Esfèriques* del mateix autor (100 dC), i la demostració, amb sis lemes previs, recollida a l'*Almagest* de Ptolemeu (*c*. 85-*c*. 165 dC). El lema 2, versió plana del teorema, és el que ha originat l'activitat d'aula per a alumnes de 4t d'ESO, que s'analitza al final de l'article com a mostra del tipus d'activitats que es poden generar a partir de textos històrics. L'activitat s'ha experimentat a l'IES Badalona VII durant el curs escolar 2006-2007.

1. El grup de treball d'història es va formar el curs 1999-2000 i pertany a l'ICE de la Universitat de Barcelona. Els altres membres del grup són M. Àngels Casals Puit (IES Joan Corominas) i Paco Moreno Rigall (IES XXV Olimpíada). Sobre el desenvolupament de la trigonometria podeu consultar Zeller (1944) i Maor (1998).

Les *Esfèriques* de Menelau

Des de l'antiguitat, l'astronomia va representar un estímul important per al desenvolupament d'algunes branques de les matemàtiques com la geometria i la trigonometria esfèriques que, juntament amb alguns elements de cosmografia, van propiciar l'aparició d'una disciplina anomenada *esfèrica*.

Dins d'aquesta tradició, l'esfera era considerada com una figura més pròpia de l'astronomia que de la geometria, i en les esfèriques s'estudiaven les línies sobre l'esfera més que l'esfera pròpiament dita. Els treballs més antics d'esfèrica van ser escrits entre els segles IV aC i I dC, i van ser sintetitzats per Pappus (~320 dC) en el llibre VI de la seva *Col·lecció matemàtica*.

Alguns autors anteriors a Menelau que van tractar problemes relatius a l'esfèrica van ser Autòlic de Pítana (360-300 aC), Euclides (~300 aC), Hiparc (190-120 aC) i Teodosi de Trípoli (107-43 aC). D'aquest darrer autor, l'obra més important que ens ha arribat és *Les esfèriques*. Es tracta d'un recull, dividit en tres llibres, que conté seixanta teoremes i problemes sobre l'esfera.

L'element innovador de l'obra homònima de Menelau les *Esfèriques* (100 dC) és el triangle esfèric, completament absent a l'obra de Teodosi de Trípoli (traducció de 1927).[2] El text original grec no ens ha arribat i només el coneixem a través de les diferents versions àrabs, llatines i hebraiques a les quals ha donat lloc. La primera de les traduccions podria haver estat feta cap a l'any 200 de l'hègira (≈ 815-816 dC) a partir d'una versió siríaca. Aquesta traducció va ser revisada per l'astrònom i matemàtic al-Māhāhni (entre el 825 i el 880) i després per al-Harawi (entre el 930 i el 990), un dels més grans astrònoms perses del seu temps. Hi ha hagut moltes altres versions del text, però se'n poden destacar dues explícitament crítiques redactades per dos savis àrabs musulmans: la primera, el 1265, del conegut astrònom i matemàtic Nasir al-din Altusi (1201-1274) i la segona, poc abans del 1300, de Muhammad Jamāl al-Din. Pel que fa a Europa, cal destacar la traducció al llatí de l'erudit sicilià François Maurolico, publicada a Messina el 1558. Aquesta traducció llatina va ser reimpresa en una obra del pare Mersenne a París, el 1664, i a continuació de la segona edició del text grec de Teodosi per Hunt a Oxford, el 1707. També el gran astrònom Halley (1656-1742) va donar-ne una versió llatina que va ser impresa el 1758.[3]

Les *Esfèriques* de Menelau, segons les versions i els agrupaments de proposicions que s'hi fan, comprenen entre 63 i 91 teoremes i normalment es divideixen en tres llibres; amb ells s'evidencia que és el primer autor que separa la trigonometria de les esfèriques i de l'astronomia.

2. Segons Paul Ver Eecke, citat en Teodosi (1927), Hiparc de Nicea ja havia fet observacions astronòmiques, un segle abans que Teodosi, que l'havien dut a plantejar-se problemes que exigien l'ús del triangle esfèric. El fet que Teodosi el descartés de la seva obra podria ser perquè les propietats d'aquesta figura no havien estat encara totalment desenvolupades; caldria esperar l'obra de Menelau.

3. Més informació sobre Menelau i la seva obra, a Bulmer-Thomas (1971) i R. Nadal *et al.* (2004).

El llibre I comença amb la definició: «un triangle esfèric és l'espai comprès entre tres arcs de cercles màxims sobre la superfície de l'esfera amb la limitació que aquests arcs són sempre menors que un semicercle». En aquest llibre sembla tenir la intenció de demostrar per als triangles esfèrics proposicions anàlogues a les d'Euclides per als triangles plans en el llibre I dels *Elements*. A la proposició 11 prova que la suma dels tres angles d'un triangle esfèric és més gran que dos de rectes. Menelau no va utilitzar l'estil de demostració d'Euclides, va evitar l'ús de proves indirectes com la reducció a l'absurd.

En el llibre II es troben les primeres proposicions directament relacionades amb problemes d'astronomia, algunes de les quals es poden trobar a l'obra de Teodosi, *Les esfèriques,* o a la d'Euclides, els *Fenòmens.* Aplica la geometria esfèrica desenvolupada en el llibre I a l'astronomia.

El llibre III es pot dividir en dues parts i està dedicat a la trigonometria esfèrica. La primera part conté alguns resultats trigonomètrics fonamentals com la proposició I, coneguda amb el nom de *teorema de Menelau*. Les proposicions següents estableixen la proporcionalitat dels sinus de certs arcs homòlegs (o de la seva suma o diferència) de dos triangles esfèrics amb certs elements iguals. Hi ha, també, teoremes que vénen de la geometria plana, referits, per exemple, a la intersecció de les bisectrius o les altures d'un triangle esfèric. La segona part tracta problemes més específics, com la comparació entre raons entre determinats arcs de cercles màxims. Aquesta segona part sembla reprendre una altra obra de Menelau que es va perdre i que tractava de problemes relatius a la sortida i la posta dels signes del zodíac.

El teorema de Menelau

El llibre III de les *Esfèriques* de Menelau comença amb la proposició següent, que més tard es coneixerà com a *teorema de Menelau*.

> Si *ADB* i *AEG* són dos arcs de cercles màxims i *DG* i *BE* són dos arcs més que es tallen en el punt *Z*, aleshores es compleix:
>
> $$\frac{\text{Crd(arc 2GE)}}{\text{Crd(arc 2EA)}} = \frac{\text{Crd(arc 2GZ)}}{\text{Crd(arc 2ZD)}} \cdot \frac{\text{Crd(arc 2DB)}}{\text{Crd(arc 2BA)}}.$$ [4]

La demostració d'aquest teorema la presentarem a partir de la que es troba al llibre I de l'*Almagest*, de Ptolemeu (85-165 dC). En aquesta obra, la demostració ve precedida de sis lemes que faciliten la seva comprensió.[5]

4. L'enunciat del teorema de Menelau és una traducció nostra del que se cita al DSB per Bulmer-Thomas (1971: 298).

5. Menelau no havia inclòs a la seva obra els sis lemes previs que trobem a l'*Almagest* de Ptolemeu. No se sap del cert per què no els va incloure, bé perquè eren coneguts a l'època o bé perquè els havia demostrat en altres llibres que s'han perdut.

Els dos primers lemes expressen relacions entre les longituds dels segments obtinguts en tallar tots els costats d'un triangle, o les seves prolongacions, per una recta qualsevol.

El lema 2, que es coneix com a versió plana del teorema de Menelau,[6] estableix el següent:

> Donat un triangle *ADG* i una recta *BZF* que talla els tres costats del triangle o les seves prolongacions en els punts *B*, *Z* i *F*, llavors es compleix:
>
> $$\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{GZ}}{\mathrm{ZD}} \cdot \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}}$$

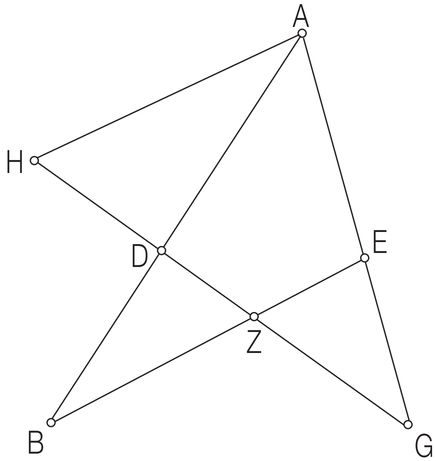

Figura 1. Il·lustració del lema 2 de l'*Almagest*. (Ptolemeu, 1984: 65, fig. 1.9)

Els altres quatre lemes relacionen arcs i cordes en un cercle i seran els que permetran fer el pas de la trigonometria plana a la trigonometria esfèrica. A tall d'exemple, el lema 3 estableix el següent:

> Si prenen tres punts consecutius *A*, *B* i *G* en un cercle de centre *D*, de tal manera que els arcs *AB* i *BG* siguin menors que un semicercle. S'uneix el punt *A* amb el *G* i el centre de la circumferència amb el punt *B*. Llavors:
>
> $$\frac{\mathrm{Crd\ arc\ 2AB}}{\mathrm{Crd\ arc\ 2BG}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EG}}.$$

6. Aquest lema és el que s'ha triat per a desenvolupar com a activitat per als alumnes.

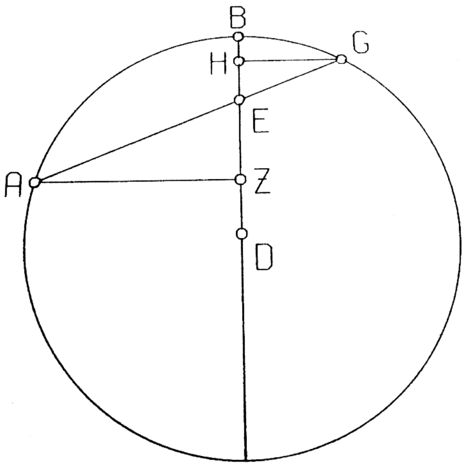

Figura 2. Il·lustració del lema 3 de l'*Almagest.* (Ptolemeu, 1984: 70, fig. 1.10)

Per demostrar el teorema de Menelau, Ptolemeu utilitza una figura, en la qual *BE* i *GD* són arcs de cercle màxim que es tallen a *Z* i van a trobar els altres arcs de cercle màxim, *AB* i *AG*. Aquesta figura reprodueix sobre l'esfera la figura que il·lustra la versió plana del teorema.

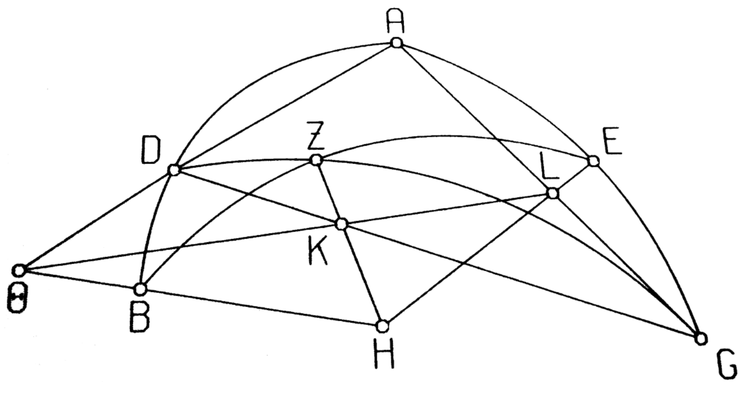

Figura 3. Il·lustració del teorema de Menelau de l'*Almagest*. (Ptolemeu, 1984: 68, fig. 1.14)

El que es tracta de demostrar és:

$$\frac{\text{Crd (arc 2GE)}}{\text{Crd (arc 2EA)}} = \frac{\text{Crd (arc 2GZ)}}{\text{Crd (arc 2ZD)}} \cdot \frac{\text{Crd (arc 2DB)}}{\text{Crd (arc 2BA)}} \cdot$$

Per a fer la demostració, primer es construeixen una sèrie de línies addicionals. S'uneix el centre *H* de l'esfera amb els punts *B*, *Z* i *E*, i s'obtenen els segments *HB*, *HZ* i *HE*. S'ajunten *A* amb *D* i també *H* amb *B*, i es prolonguen fins a trobar-se en Θ. S'ajunten també *D* amb *G* i *A* amb *G*, i s'anomenen *K* i *L* els punts de tall de les línies *DG* i *AG* amb *HZ* i *HE*.

Un cop feta la construcció, es posa de manifest que els punts Θ, *K* i *L* estan alineats perquè pertanyen simultàniament al pla que determina el triangle *ADG* i també al pla que determina el cercle màxim *BZE*.

La demostració pròpiament dita comença amb l'aplicació del teorema en la seva versió plana a la figura determinada per les línies *A*Θ, *AG*, Θ*L* i *GD*, i en resulta la igualtat:

$$\frac{\mathrm{GL}}{\mathrm{LA}} = \frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{KD}} \cdot \frac{\mathrm{D\Theta}}{\mathrm{\Theta A}} \quad (*)$$

Després es converteix cadascuna d'aquestes fraccions en quocient de cordes aplicant els lemes previs. Per exemple, aplicant a la part dreta de la figura el lema 3 que hem posat d'exemple, obtindrem:

$$\frac{\mathrm{GL}}{\mathrm{LA}} = \frac{\mathrm{Crd\ arc\ 2GE}}{\mathrm{Crd\ arc\ 2EA}}$$

De manera similar, es converteixen les altres dues fraccions, i un cop convertides es reescriu la igualtat (*) en termes de cordes, i s'obté el teorema.

Després d'aquesta demostració hi ha una sèrie d'exemples sobre l'aplicació del teorema als càlculs astronòmics, com per exemple el càlcul de la declinació de l'eclíptica.

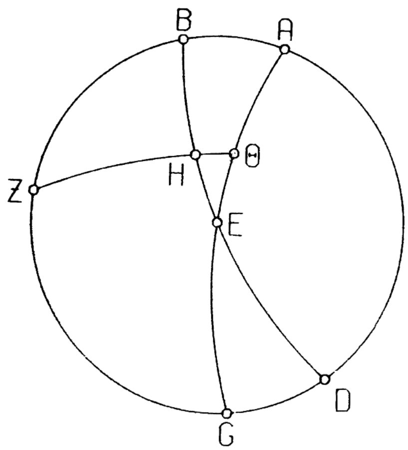

Figura 4. Il·lustració del càlcul de la declinació de l'eclíptica. (Ptolemeu, 1984: 70, fig. 1.15)

En aquesta figura, *AEG* representa l'equador i *BED*, l'eclíptica. *E* és el punt d'intersecció d'ambdós cercles a l'equinocci de primavera. *Z* és el pol de l'equador en l'arc *ABG* i $Z\Theta$ és un arc de cercle màxim que talla l'eclíptica en el punt *H*.

Es tracta de determinar la declinació $H\Theta$.

Els arcs *BE* i $Z\Theta$, que troben els arcs *AZ* i *AE* i es tallen en el punt *H*, reprodueixen la figura del teorema de Menelau i, per tant, es pot aplicar el teorema que donarà el valor de la declinació.

Teorema de Menelau per a dues dimensions. Activitat de classe

Aquest teorema és el que s'ha desenvolupat com a activitat d'aprenentatge per a alumnes de 4t d'ESO. L'enunciat del teorema diu:

> Si una recta talla els costats *AG*, *GD* i *DA* del triangle *ADG* (o les seves prolongacions) en els punts *E*, *Z* i *B* respectivament, aleshores: $\dfrac{GE}{EA} = \dfrac{GZ}{DZ} \cdot \dfrac{DB}{BA}$.
>
> Que equival a dir: $\dfrac{AE}{EG} = \dfrac{GZ}{DZ} \cdot \dfrac{DB}{BA} = 1$.

L'activitat es realitza durant dues sessions de classe consecutives, a la primera de les quals cada alumne ha de disposar d'un ordinador. Es tracta de fer una construcció amb el Geogebra, semblant a la que il·lustra el lema 2 previ a la demostració del teorema de Menelau a l'*Almagest*, i comprovar amb el mateix programa la igualtat: $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{BD}{CD} = 1$. A continuació, amb la dinàmica que permet el programa[7] es tracta d'anar movent la figura i, fent el càlcul per diferents posicions, veure que la igualtat es manté per a qualsevol triangle i qualsevol recta que talli els seus costats o les seves prolongacions.

Es planteja la situació als alumnes: un triangle *ABC* i una recta qualsevol per dos punts (*P*, *Q*) que talla els tres costats del triangle en tres punts (*D*, *E*, *F*). Se'ls dóna una sèrie d'instruccions i, finalment, se'ls demana que enunciïn el teorema. La seqüència d'instruccions per als alumnes és:

1. Construïu un triangle *ABC* i una recta *PQ* que talli els tres costats del triangle o les seves prolongacions.
2. Anomeneu *D* el punt de tall de la recta *PQ* amb *BC* o la seva prolongació i *E* i *F* els corresponents a *AC* i *AB* respectivament.
3. Calculeu la relació: $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{DB}{CD} = 1$.

7. En les construccions amb Geogebra (Hohenwarter, 2006) es poden moure objectes, sense que es perdin els vincles amb què han estat creats. Això permet comprovar propietats d'una manera molt àgil. Encara que aquestes comprovacions no poden substituir les demostracions, són de gran ajut per a la seva comprensió. Sovint convencen més els alumnes que les demostracions formals.

4. Moveu els vèrtexs del triangle i també la recta *PQ*. Refeu el càlcul de l'apartat anterior i observeu que la relació es manté.
5. Enuncieu el teorema.

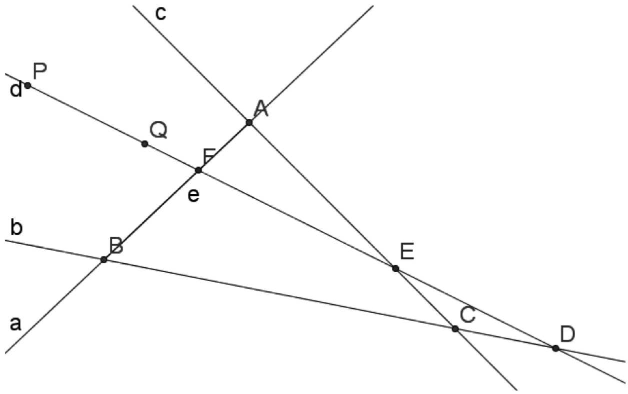

Figura 5. Il·lustració de la construcció del teorema amb el Geogebra.

L'activitat es va desenvolupar satisfactòriament. La majoria d'alumnes van enunciar el teorema de forma correcta després d'una posada en comú amb els companys. Finalment, un alumne va escriure l'enunciat a la pissarra.

Per a la segona sessió els alumnes havien d'haver cercat informació sobre Menelau i Ptolemeu, l'època i el lloc en què van viure i les seves obres.

L'objectiu d'aquesta sessió era que cada alumne reproduís la demostració del teorema de Menelau que apareix a l'*Almagest* amb l'ajuda d'unes indicacions que se li donaven en els fulls de treball. Un cop completat per l'alumne, el text havia de dir:

a) Es construeix la paral·lela a la recta *DEF* pel punt *B* i s'anomena *I* el punt de tall amb *AC*.

b) Es reuneixen les condicions per aplicar el teorema de Tales als costats *AB* i *AC* del triangle i, per tant, $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{IE}$ es complirà.

c) Es multiplica i divideix per *CE* el segon membre de la igualtat, que es transformarà en: $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CE}{IE}$.

d) S'aplica el teorema de Tales als costats *AC* i *BC*; aleshores es compleix $\frac{CE}{BF} = \frac{CD}{IE}$.

e) A la igualtat obtinguda a l'apartat *c*), se substitueix $\frac{CE}{BF}$ per la fracció equivalent-obtinguda a l'apartat *a*) i s'obté: $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{IE} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CE}{IE} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD}$.

Considerant el primer i darrer termes d'aquesta igualtat i passant el producte de fraccions del segon membre al primer, equival a:

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{BD}{CD} = 1.$$

És interessant remarcar que la demostració inclou dos tipus de raonaments, el geomètric i l'aritmètic, i que trobar-los plegats en una demostració ja és de per si un bon argument per incloure aquesta activitat en una unitat didàctica. Com a mostra del primer raonament, s'adjunta el paràgraf següent del dossier, que correspon a l'apartat *b*) de la seqüència descrita anteriorment:

> Completa la proporció següent amb els segments corresponentes, $\frac{AF}{BF} = \ .$
>
> Pinta sobre el dibuix amb dos colors diferents els quatre segments relacionats, els numeradors verds i els denominadors vermells.

Com a mostra del raonament aritmètic, a l'apartat *c*) es llegeix el paràgraf següent:

> La relació que volem demostrar comença com la fórmula, $\frac{AF}{BF} = \frac{\quad}{\quad}$ però cal introduir el segment *CE*.
>
> $$\frac{AF}{BF} = \frac{\quad}{CE}\,\frac{CE}{\quad}.$$
>
> Si la primera igualtat és certa, també ho és la segona. Quina propietat de les fraccions permet fer-ho?

Per tal de donar rellevància a la introducció de petites falques d'història, aquest tipus d'activitats d'aprenentatge també són avaluades dins de la seqüència didàctica en què s'incorporen. En aquest cas, el tema treballat pels alumnes va ser el teorema de Tales i el teorema de Menelau. Una de les activitats d'avaluació va consistir en un examen de quatre preguntes, la darrera de les quals era:

a) Enuncia el teorema de Menelau ajudant-te amb un dibuix.
b) Quin altre teorema s'utilitza per a fer la demostració?
c) A quina època va viure Menelau i per a què s'utilitzava el teorema que ara porta el seu nom?

És interessant remarcar la bona acollida que va tenir l'activitat per part de l'alumnat i la riquesa de registres que va suposar incloure preguntes d'història de la matemàtica en la prova; va donar més versatilitat a l'avaluació i va afavorir l'atenció a la diversitat.

Conclusions

L'activitat de classe ha aportat als alumnes diversos coneixements i han après diferents maneres de treballar. Han construït el teorema utilitzant el Geogebra, un recurs actual per a demostrar un teorema antic. Han fet la demostració simulant el raonament que fa Ptolemeu en l'*Almagest.*

Han constatat que aquest teorema matemàtic dóna resposta a un problema d'astronomia: mesurar les posicions i el moviment dels astres. Han vist que la recerca matemàtica obté resultats importants quan hi ha confluència entre diferents escoles i autors que treballen en la mateixa línia. La introducció de la part històrica ha contribuït, també, a la millora de l'actitud d'alguns alumnes.

Des de la perspectiva del projecte «El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions», el teorema de Menelau és significatiu perquè marca el moment en què se separa la trigonometria de les esfèriques i de l'astronomia. A les *Esfèriques* de Menelau, després del llibre I dedicat a la geometria esfèrica i del II dedicat a l'astronomia, el teorema és la primera proposició del llibre III, el dedicat a la trigonometria esfèrica.

Però, a més, el teorema de Menelau és important perquè va ser un dels pilars sobre els quals es va desenvolupar la trigonometria àrab. El mateix Nasir-al-Tusi (1201-1274), en el *Tractat del quadrilàter*, reconeix la importància del teorema i, referint-se a la relació que estableix, diu: «Els antics no han deixat d'utilitzar-la en aquest sentit i se n'han servit amb confiança, així és com es veu a les *Esfèriques* de Menelau i al començament de l'*Almagest* de Ptolemeu» (Nassiruddin-el-Toussy, 1891: 113-114). I, més endavant, en el mateix text, l'utilitza per a demostrar el teorema del sinus. Aquest nou teorema serà un altre pas de gegant en el desenvolupament de la trigonometria, perquè permetrà passar d'una relació entre sis quantitats, la que establia el teorema de Menelau

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin\ CZ}{\sin\ ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA},$$

a una relació més simple i eficaç per als càlculs en què només apareixen quatre quantitats:

$$\frac{\sin\ a}{\sin\ b} \cdot \frac{\sin B}{\sin A} = 1.$$

Bibliografia

ARISTARCO DE SAMOS (2007), *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna,* introducció, traducció i notes de M. R. Massa-Esteve, Cadis, Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

BATLLÓ J. *et al*. (coord.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, 153-159.

BULMER-THOMAS, I. (1971), «Menelaus of Alexandria». A: GILLISPIE, C. C. (ed.) (1981), *Dictionary of scientific biography,* Nova York, Charles Scribner's Sons, 296-302.

GUEVARA, I.; CASALS, M. A. (2003), «Resolució de triangles per mètodes geomètrics i mètodes algebraics en l'obra *De triangulis omnimodis* (1464) de Regiomontanus (1436-1476)». A: BATLLÓ J. *et al.* (coord.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, 191-199.

MAOR, E. (1998), *Trigonometric delights,* Princeton, Princeton University Press.

MASSA, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica», *Biaix*, **21**, 4-9.

MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2003), «De la geometria a la trigonometria: el teorema de Ptolemeu». A: BATLLÓ, J. *et al*. (coord.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, 153-159.

NADAL, R.; ABDELKADDOUS, T.; PINEL, P. (2004), «Le contenu astronomique des Sphériques de Ménélaos», *Archive for History of Exact Sciences*, **58** (5), 381-436.

NASSIRUDDIN-EL-TOUSSY (1891), *Traité du quadrilatère,* traducció francesa d'A. Pacha, Constantinoble.

PTOLEMEU (1984), *Almagest,* traducció de G. J. Toomer, Nova York, Berlín, Heidelberg, Tòquio, Springer-Verlag.

ROMERO, F.; GUEVARA, I.; MASSA, M. R. (2007), «Els elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (coord.), *Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament,* Barcelona, SCHCT, 113-119.

ROMERO, F.; MASSA, M. R.; CASALS, M. A. (2006), «La trigonometria en el món àrab. Tractat sobre el quadrilàter complet de Nasir al-din Altusi (1201-1274)». A: BATLLÓ J. *et al.* (coord.), *Actes de la VIII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica,* Barcelona, SCHCT, 569-575.

TEODOSI DE TRÍPOLI (1927), *Les spheriques de Théodose de Tripoli,* traducció de Paul Ver Eecke, Bruges, Desclee de Brouwer et Cie.

ZELLER, S. M. C. (1944), *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus,* Michigan, Ann Astor, University of Michigan.

Pàgines web

HOHENWARTER, M., *Geogebra. Dynamic Mathematics for Schools* <http://www.geogebra.org> (13-XI-2006).